Title	二重分岐被覆空間の既約性について (低次元多様体の構造と分類について)
Author(s)	河野, 正晴
Citation	数理解析研究所講究録 (1981), 417: 106-121
Issue Date	1981-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/102486
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
417巻 1981年 106-121

2重分岐被覆空間の既約性について

河野正晴（北大、理）

3-manifoldが fake 3-ballをふくまない時 そのmanifoldを(C.P)-manifold と呼ぶ（又は略して単に(C.P)である）。ここでは(C.P)-manifoldの2-fold branched coveringが又(C.P)-manifold であることを示す。（証明などの詳しい所は[K]参照。）「すべての3-manifold は(C.P)である」という命題はPoincaré Conjecture と同値となる。又(C.P)-manifold Mに対して $\pi_2(M)=0$ となる時はMにirreducible（i.e. $\forall S^2 \subset M$ 2-sphere に対し $\exists B^3$: 3-ball ∋ $\partial B^3 = S^2$）である。又Mが irreducible の時 $\pi_1(M) \neq 1$ ならMは(C.P)-manifoldである。結果は以下のとうりである。

定理 1

M, Nを closed orientable 3-manifold とする。

$p:(M,\tilde{L}) \longrightarrow (N,L)$ をMからNへのLでbranchする

2-fold branched covering であるとする。この時Nが(C.P)ならばMも(C.P)である。

Corollary

3-sphere の 2-fold branched covering space は(C.P)である。

又上のCorollaryを用いて次の結果がわかる

定理2

Mを3-sphere上の2-fold branched covering spaceとする。この時 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ なら $M \cong S^2 \times S^1$, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$ なら $M \cong P^3$ である。

§1.

定理1を証明するためにいくつかのLemma Propositionを示す。

Proposition 1

Mをclosed orientable 3-manifold, gをM上のorientation preserving involutionとする($g^2 = id_M$)。この時embedded 2-sphere $S^2_1, \cdots, S^2_n$ が存在して次の2つの条件を満足

する。

(1) 任意の i ($1 \le i \le m$) について $S_i^2 \cap g(S_i^2) = \phi$ 又は $g(S_i^2) = S_i^2$ が成立する。

(2) $[S_1^2], \cdots, [S_m^2]$ は $\pi_2(M)$ を $\pi_1(M)$-module と見たとき、それを generate する。

$\mathrm{Fix}(g) = \Sigma$ とする。M にうめこまれた任意の 2-sphere S^2 を考える。この時

type (a) $\quad S^2 = g(S^2)$

type (b) $\quad S^2 \neq g(S^2)$

のいずれかになる。type (b) の時 transversal technique を用いて、S^2 は Σ と M で、S^2 と $g(S^2)$ は $M - \Sigma$ で transversal としてよい。この時

$$X(S^2) = S^2 \cap g(S^2) - \Sigma$$

$$Y(S^2) = S^2 \cap g(S^2) \cap \Sigma$$

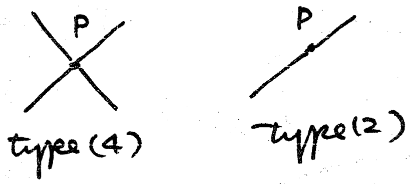
とおく。さて

$\alpha(S^2)$ を次の様にきめる。

$$\alpha(S^2) = \begin{cases} X(S^2) \text{ の component の数} & S^2 \text{ が type(b) の時} \\ 0 & S^2 \text{ が type(a) の時} \end{cases}$$

又 P を $Y(S^2)$ の点とし、B_P を P の small neighborhood とした時、$B_P \cap X(S^2)$ の component の数が i である時、点 P は type (i)

であるという。この時
次が言える。



<u>Lemma 1</u>

S^2を type (b) の 2-sphere とする。isotopy で S^2 を少し動かして $Y(S^2)$ をすべて type(2) の点にできる。
(証明は略)

<u>Lemma 2</u>

S^2を embedded 2-sphere で $\alpha(S^2) \neq 0$ とする。この時 2個の 2-sphere S_1^2, S_2^2 が存在して次の条件を満す。

(i) $\max(\alpha(S_1^2), \alpha(S_2^2)) < \alpha(S^2)$

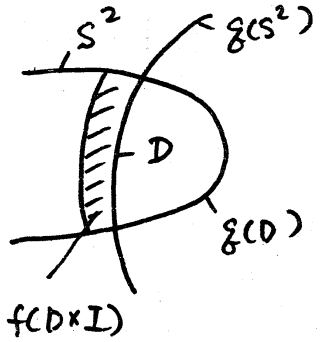
(ii) $[S_1^2]$ と $[S_2^2]$ から $\pi_1(M)$-module として generate される $\pi_2(M)$ の sub-module は $[S^2]$ を含む。

(proof) Lemma 1 により Y の点はすべて type(2) としてよい。この時 $g(S^2)$ 上に innermost な 2-disk D が存在する。i.e. $D \cap S^2 = \partial D$。この時次のいずれかが起こる。

(1) $g(\partial D) = \partial D$

(2) $g(\partial D) \cap \partial D = \phi$

Case (1)　この時 map $f: D\times I(=[0,1]) \longrightarrow M$ が存在して



(a) $f(D\times 0)=D$

(b) $f(\partial D\times I)=f(D\times I)\cap S^2$

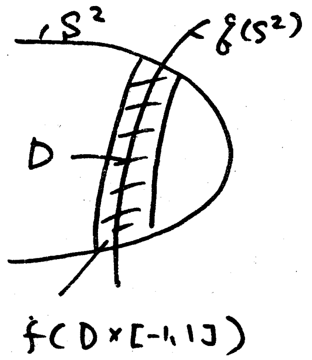
(c) $f(D\times 1)\cap g(D)=\phi$

を満す。この時 $S_1^2=D\underset{\partial}{\cup} g(D)$

$S_2^2=\{S^2-(g(D)\cup f(\partial D\times[0,1]))\}\cup f(D\times 1)$ とおく。

この S_1^2, S_2^2 は Lemma の条件 (ii) を満すことは明らか。又 $g(S_1^2)=S_1^2$ より $\alpha(S_1^2)=0$。$S_2^2\cap g(S_2^2)\subset S^2\cap g(S^2)-\partial D$ より $\alpha(S_2^2)<\alpha(S^2)$。よって case (1) は O.K

Case (2)　この時は map $f: D\times[-1,1]\longrightarrow M$ が存在して



(a) $f(D\times 0)=D$

(b) $f(D\times[-1,1])\cap S^2=f(\partial D\times[-1,1])$

(c) $f(D\times[-1,1])\cap g(S^2)=f(D\times 0)$

を満足する。

$S^2-f(D\times(-1,1))$ は 2つの component を持つ。それを S_+, S_- とする。ただし S_+ は $f(\partial D\times 1)$ と交わる component とする。その時 $S_1^2=S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)$, $S_2^2=S_-\underset{\partial}{\cup} f(D\times(-1))$ とおくと条件の (ii) はO.K。

$S_1^2\cap g(S_1^2)=\{S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)\}\cap g\{S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)\}$

$$= \{S_+ \cap g(S_+)\} \cup \{f(D\times 1) \cap g(S_+)\}$$
$$\cup\, g\{f(D\times 1) \cap g(S_+)\} \cup \{f(D\times 1) \cap g(D\times 1)\}$$
$$= S_+ \cap g(S_+) \subset S^2 \cap g(S^2) - \partial D$$

よって $\alpha(S_1^2) < \alpha(S^2)$ 。同様に $\alpha(S_2^2) < \alpha(S^2)$ □

さて、Proposition 1を証明する。 sphere-theorem により M にうめこまれた 2-sphere $S_1^2, \cdots, S_m^2$ が存在して $[S_1^2], \cdots, [S_m^2]$ は $\pi_1(M)$-module として $\pi_2(M)$ を generate する。$\alpha(S_i^2) \neq 0$ の時は Lemma 2 を使うことにより、m の数はふえるが $\alpha(S_i^2) = 0$ と仮定できる。この時 $g(S_i^2) = S_i^2$ (type (a)) 又は $g(S_i^2) \cap S_i^2 = \phi$ (type (b)) とできるので o.k. □

以下 §1 では M, N は closed orientable 3-manifold とし、$p: (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ を N の L で branch する 2-fold branched covering とする。 g を p の non-trivial な covering transformation とする。 又 $B_0^3 = \{(re^{i\theta}, t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid r^2+t^2 \leq 1\}$ を 3-ball とし、$p_0 : B_0^3 \longrightarrow B_0^3$ を $p_0(re^{i\theta}, t) = (re^{i2\theta}, t)$ とし、$\tilde{L}_0 = L_0 = \{(0, t)\} \cap B_0^3$ とする。 この時 $p_0 (B_0^3, \tilde{L}_0) \longrightarrow (B_0^3, L_0)$ を standard な branched covering と呼ぶ

Lemma 3

M の中に 3-ball を bound しない 2-sphere S^2 で $g(S^2)=S^2$ となるものが存在したとする。この時次の3つのいずれかがおこる。

① $M=M_1 \# M_2$ $(M_i \not\cong S^3)$, $N=N_1 \# N_2$ で $p_i:(M_i,\tilde{L}_i)\longrightarrow(N_i,L_i)$: N_i の L_i 上で branch する 2-fold branched covering が存在する ($i=1,2$)。

② $M\cong S^2\times S^1$

③ $M=M_1\#(S^2\times S^1)$, $N=N_1\# P^3$ で $p_1:(M_1,\tilde{L}_1)\longrightarrow(N_1,L_1)$: N_1 の L_1 で branch する 2-fold branched covering が存在する。

(proof) $S^2\times[-1,1]$ を S^2 の small invariant neighborhood とする ($S^2\times\{0\}=S^2$)。この時

(1) S^2 が M を separate する

(2) S^2 が M を separate しない

の2つの場合がある。

Case (1) $M-S^2\times(-1,1)=V_1\cup V_2$ とおく。この時更に2つの場合 (1-i) $S^2\cap\tilde{L}=\phi$ (1-ii) $S^2\cap\tilde{L}\neq\phi$ とにわけられる。

(1-i): $p(S^2\times[-1,1])$ は projective plane 上の twisted I (interval) - bundle となる。よって $N-p(S^2\times(-1,1))$ は

connected で、$g(V_1)=V_2$ となる。ところが $\tilde{L}=\tilde{L}\cap M=(\tilde{L}\cap V_1\cap V_2)\cup(\tilde{L}\cap S^2\times[-1,1])=\phi$ となり矛盾。

▨(1-ii)：この時 $g(V_i)=V_i$ $(i=1,2)$。この時各 i $(i=1,2)$ に対し次の同相写像 $f_i : \partial B_0^3 \longrightarrow \partial V_i$，$g_i : \partial B_0^3 \longrightarrow p(\partial V_i)$ が存在して、下の diagram を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial V_i & \xleftarrow{\ f_i\ } & \partial B_0^3 \\ \downarrow p & & \downarrow p_0 \\ p(\partial V_i) & \xleftarrow{\ g_i\ } & \partial B_0^3 \end{array}$$

この時 $M_i = V_i \underset{f_i}{\cup} B_0^3$，$N_i = p(V_i) \underset{g_i}{\cup} B_0^3$ とし、

$$p_i(x)=\begin{cases} p(x) & x\in V_i \\ p_0(x) & x\in B_0^3 \end{cases}$$ とおく。

この時 p_i は 2-fold branched covering となり、$M=M_1\# M_2$，$N=N_1\# N_2$ となる。又 S^2 が 3-ball を bound しないことにより M_1 も M_2 も 3-sphere にはならない。よって①が起こる。

Case (2)　$V=M-S^2\times(-1,1)$，$W=N-p(S^2\times(-1,1))$ とおく。更に2つの場合にわける。(2-i) $S^2\cap\tilde{L}=\phi$，(2-ii) $S^2\cap\tilde{L}\neq\phi$。

▨(2-i)：$p(S^2\times[-1,1])$ は projective plane 上の twisted I-bundle。$\partial V=S_1^2\cup S_2^2$ とおく。

この時次の diagram を可換にする同相写像 f_1, f_2, g が存在する。

$$\begin{tikzcd}
S_1^2 \arrow[d, "p"'] & S_2^2 \arrow[d, "p"] & \partial B_0^3 \arrow[ll, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "id"] & \partial B_0^3 \arrow[ll, bend right, "f_2"'] \arrow[dl, "id"] \\
p(S_1^2) \arrow[r, phantom, "="] & p(S_2^2) & \partial B_0^3 \arrow[l, "g"] &
\end{tikzcd}$$

この時 $M_1 = V \underset{f_1}{\cup} B_0^3 \underset{f_2}{\cup} B_0^3$, $N = W \underset{g}{\cup} B_0^3$

$$p_1(x) = \begin{cases} p(x) & x \in V \\ x & x \in B_0^3 \end{cases}$$

とおくと、

$M = M_1 \# (S^2 \times S^1)$, $N = N_1 \# P^3$ となる。(⇨ ③)

(2-ii) : $\partial V = S_1^2 \cup S_2^2$ とおくと、各 i ($i=1,2$) に対し同相写像 f_i, g_i が存在し、下の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
S_i^2 \arrow[d, "p"'] & \partial B_0^3 \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "p_0"] \\
p(S_i^2) & \partial B_0^3 \arrow[l, "g_i"]
\end{tikzcd}$$

$M_1 = V \underset{f_1}{\cup} B_0^3 \underset{f_2}{\cup} B_0^3$, $N_1 = W \underset{g_1}{\cup} B_0^3 \underset{g_2}{\cup} B_0^3$

$$p_1(x) = \begin{cases} p(x) & x \in V \\ p_0(x) & x \in B_0^3 \end{cases}$$

とおくと、

p_1は 2-fold branched covering で $M = M_1 \# (S^2 \times S^1)$, $N = N_1 \# (S^2 \times S^1)$。
M_1が 3-sphere でない時は $M_2 = S^2 \times S^1$, $N_2 = S^2 \times S^1$ とおくと M_2 から N_2 へ branched covering が存在する。よって①。M_1が 3-sphere の時は②。

<u>Lemma 4</u>

$\pi : (S^2 \times I, L') \longrightarrow (\beta, L)$　2-fold branched covering とすると次のいずれか？

(1) βは 3-ball で Lは trivial knot

(2) $\beta = S^2 \times I$ で 任意の $t \in I$ に対し $S^2 \times \{t\} \cap L$ は 2-points。

（証明は略）

<u>Lemma 5</u>

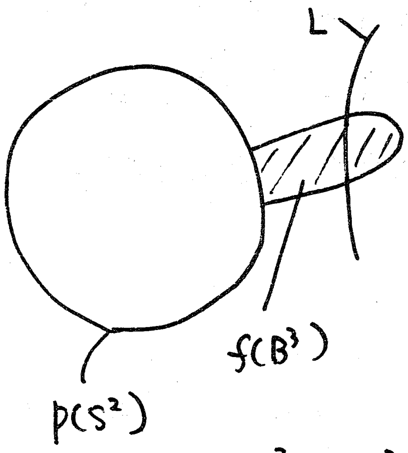
S^2を M内の 2-sphere で $S^2 \not\simeq 0$ かつ $S^2 \cap g(S^2) = \phi$ とすると、次の3つのいずれかが起こる。

① $g(S') = S'$ で 3-ball を bound しない 2-sphere S' がM内に存在する。

② Lは trivial knot　つまり $M = N \# N$

③ $M = M' \# (S^2 \times S^1)$ で
　$p' : (M', L') \longrightarrow (N, L')$ となる 2-fold branched covering が存在する。

（証明）　$f : B^3 \longrightarrow N$ で次の条件を満す同相写像が存在する。

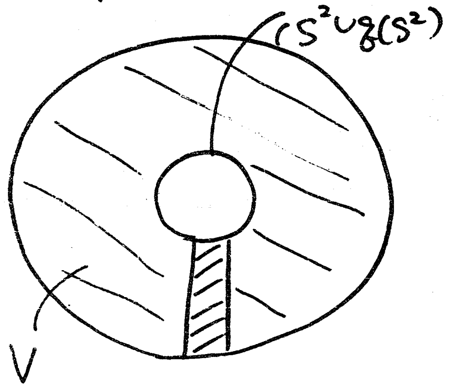


(1) $(f(B^3), f(B^3)\cap L)$ は trivial ball pair

(2) ∂B^3 上の 2-disk D が存在して $f(B^3)\cap p(S^2) = f(D)$

この時 $S=(p(S^2)-f(\mathring{D}))\cup f(\partial B^3-\mathring{D})$

$S'=p^{-1}(S')$ とする。 S' が 3-ball を bound しなければ①。



よって S' は 3-ball V を bound すると仮定する。 $V\cap p^{-1}(f(\partial B^3))$ は2個の 2-disk 又は $S^1\times I$。2個の 2-disk の時は $V-\mathrm{Int}(p^{-1}(f(B^3)))$ は2個の3-ball となり $S^2\not\simeq 0$ に矛盾。よって $V\cap p^{-1}(f(\partial B^3))$ は $S^1\times I$、故に $V\cup p^{-1}(f(B^3))=S^2\times[0,1]$ としてよい。ここで $S^2\times\{0\}=S^2$, $S^2\times\{1\}=g(S^2)$ としてよい。

$p|_{S^2\times I}: S^2\times I \longrightarrow p(S^2\times I)$ は 2-fold branched covering。Lemma 4 より $p(S^2\times I)$ は 3-ball で $p(S^2\times I)\cap L$ は trivial knot。 $W=N-p(S^2\times(0,1))$ とおくと、(a) $p^{-1}(W)$ は 2-component (b) $p^{-1}(W)$ は connected の2つの場合にわかれる。(a)の時は $L\cap W=\phi$ なので $L=L\cap p(S^2\times I)$、よって L は trivial (⇒②) (b)の時は $W'=p^{-1}(W)$, $\partial W'=S_1^2\cup S_2^2$ と

おく。 この時同相写像 f_1, f_2, g が存在して下の diagram を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
S^2_1 \arrow[d, "p"'] & S^2_2 \arrow[dl, "p"] & \partial B^3_0 \arrow[ll, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "id"] & \partial B^3_0 \arrow[ll, bend right, "f_2"'] \arrow[dl, "id"] \\
\partial W & & \partial B_0^3 \arrow[ll, "g"] &
\end{tikzcd}
$$

$M' = W' \underset{f_1}{\cup} B^3_0 \underset{f_2}{\cup} B^3_0$, $N' = W \underset{g}{\cup} B^3_0$

$$
p'(x) = \begin{cases} p(x) & x \in W' \\ x & x \in B_0^3 \end{cases}
$$

とおくと

$M = M' \# (S^2 \times S^1)$ $N = N'$ となり p' は 2-fold branched covering となる ($\Longrightarrow$ ③)。 □

Lemma 6

$M = M_1 \# M_2$ の時

M：$C(p)$-manifold $\Longleftrightarrow$ M_1 と M_2 は $C(p)$-manifold

(well-known)

これ以降我々は Thurston などによって示されたとされる次の定理を仮定する

Theorem (homotopy Smith Conjecture)

K を homotopy 3-sphere Σ の内の non-trivial knot とする。

K で branch する Σ の p-fold cyclic branched covering space は simply connected ではない。

さて証明にはいる前に次のことを定義する。

定義

closed orientable 3-manifold M は prime な manifold の connected sum に一意的に分解される。i.e. $M = M_1 \# \cdots \# M_m$ 。この時この個数 m を $PD(M)$ と書く。

最初に特別な場合を示す。

Proposition 2

$\pi_2(M) = 0$ の時 N が (C,P)-manifold なら M も (C,P)-manifold。

(証明の outline) M 内に homotopy 3-ball $\mathcal{B}$ をとり、それが 3-ball であることを示す。$d(\partial\mathcal{B})$ に関する induction で Lemma 2 を示した方向で行なう。Lemma 2 との違いは、今度は 2-sphere だけでなく、それに bound される homotopy 3-ball が必要という点。そのために $\pi_2(M) = 0$ が必要。

§2.

(Proof of theorem 1)

$PD(M)$についてのinductionで示す。$PD(M)=1$の時。Mはprimeなので$M\cong S^2\times S^1$又はirreducible。$M\cong S^2\times S^1$なら(C.P)は明らか。irreducibleの時は$\pi_1(M)=1$の時は$\pi_1(N)=1$となるので$N\cong S^3$。よってTheorem(HSC)より$M\cong S^3$。$\pi_1(M)\neq 1$の時はirreducibleから(C.P)がしたがう。$n=PD(M)$未満のmanifoldについては定理は正しいと仮定する。$\pi_2(M)=0$の時はProposition 2を示しているので$\pi_2(M)\neq 0$とする。この時Proposition 1より$[S^2]\neq 0\in\pi_2(M)$となるS^2が存在して$g(S^2)=S^2$又は$g(S^2)\cap S^2=\phi$となる。$g(S^2)=S^2$の時Lemma 3が適用できる。①の時Lemma 6よりN_1, N_2は(C.P)。

$p_i:(M_i,\widetilde{L}_i)\longrightarrow(N_i,L_i)$ $(i=1,2)$は$PD(M_i)<PD(M)$なのでTheoremが使えてM_1, M_2は(C.P)、よってMも(C.P)。

②の時は明らか。③の時も$PD(M_1)=PD(M)-1$なので①の時と同様にできる。$g(S^2)\cap S^2=\phi$の時はLemma 5を適用すれば同様にできる。□

Lemma 7

$p : \tilde{M} \longrightarrow M$ 2-fold unbranched covering

M: (C.P)-manifold $\Longrightarrow$ $\tilde{M}$ も (C.P)-manifold

(proof) Hempel [H] の Lemma 10.4 (p 96) と同様に示すことができる。

Theorem 2

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

(i) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} \Longrightarrow M \cong S^2 \times S^1$

(ii) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2 \Longrightarrow M \cong P^3$

(proof)

(i) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$; [J] により $M \cong S^2 \times S^1 \# \Sigma$ (ここで Σ は homotopy 3-sphere)。Theorem 1 より M は (C.P)。よって Lemma 6 より Σ は (C.P)、つまり $\Sigma \cong S^3$。

(ii) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$; Theorem 1 より M は (C.P)。$\tilde{M}$ を M の universal covering space とすると 2-fold covering。よって Lemma 7 より $\tilde{M}$ は (C.P) で $\tilde{M} \cong S^3$。M は S^3 を $\mathbb{Z}_2$-action でわったものになるが、[L] より $M \cong P^3$。

References.

[H] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies #86, Princeton Univ. Press.

[J] W. Jaco, Three manifolds with fundamental group a free product, Bull. Amer. Math. Soc 75 (1969) 972-977

[K] M. Kouno, The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, preprint

[L] G.R. Livesay, Fixed point free involutions on the 3-sphere, Ann. of Math. 72 (1960) 603-611